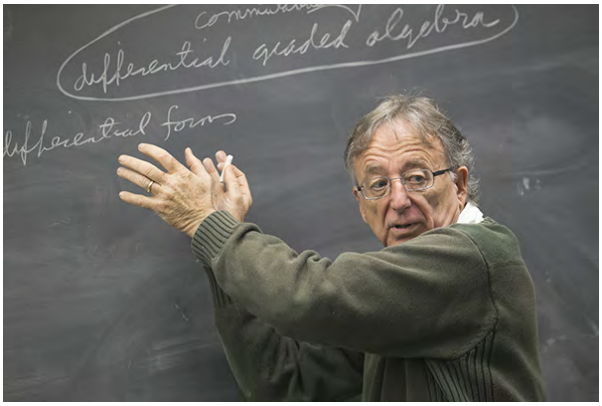
Dennis Sullivan: Premi Abel 2022

Joana Cirici
Departament de Matemàtiques i Informàtica, UB



Dennis Parnell Sullivan ha estat guardonat amb el Premi Abel 2022 per "les seves contribucions innovadores a la topologia en el sentit més ampli, i en particular els seus aspectes algebraics, geomètrics i dinàmics". Tant la topologia com els sistemes dinàmics són dues àrees de les matemàtiques on les estructures geomètriques tenen un rol fonamental. Potser és per això que Dennis Sullivan les percep com una sola àrea, i que alguns el presenten com l'unificador de la topologia i el caos[5]. En paraules del president del Comitè Abel, Hans Munthe-Kaas, "Dennis P. Sullivan ha canviat repetidament el panorama de la topologia amb la introducció de nous conceptes, demostrant teoremes de referència, responent antigues conjectures i formulant nous problemes que han fet avançar el camp. S'ha mogut d'una àrea a una altra aparentment sense dificultat, utilitzant idees algebraiques, analítiques i geomètriques com un autèntic virtuós".

Havent-nos estat encarregada la quasi impossible tasca de resumir les contribucions matemàtiques de Dennis Sullivan en un nombre finit de pàgines, ens proposem fer el contrari (o no). Hem preguntat al guardonat per aquells problemes que (fins ara) s'han resistit a la insistència perseverant i continuada del protagonista. La resposta ens arriba en forma de diversos correus que desenvolupen quatre problemes -o temes- sota el títol *Unrequited Jugendtraums und Altentraums*. Aquests interessants problemes expliquen la trajectòria, història i evolució de les matemàtiques tant de Sullivan com del seu entorn. Deixen entreveure una manera de pensar única, brillant i que sempre busca maximitzar la senzillesa de les solucions dins la complexitat dels problemes presentats.

Problema I: Simetries de Galois en varietats

L'origen d'aquest problema es remunta a les contribucions inicials de Sullivan al *Hauptvermutung de la topologia combinatòria*. Aquesta conjectura, formulada el 1908 per Ernst Steinitz i Heinrich Franz Friedrich Tietze, va ser cabdal des dels inicis de la topologia, i es pregunta per la unicitat de les triangulacions. Certa per a espais topològics de dimensió < 4, John Milnor (Premi Abel 2011) va trobar-ne contraexemples en poliedres de dimensions superiors. No obstant això, quedava oberta la conjectura en el cas de les varietats diferenciables. Als topòlegs, sovint ens convé saber llegir amb dos tipus d'ulleres: les d'*equivalència homotòpica*, més grolleres, i les d'*homeomorfisme*, força més fines. Una *equivalència homotopica* entre dos espais ve donada per una deformació contínua d'un espai a l'altre. Un *homeomorfisme* n'és un cas especial, que en particular requereix tenir una bijecció entre els dos espais. Per exemple, un disc sòlid és homotòpicament equivalent a un punt (podem anar escurçant el radi fins a atapeir tot el disc en un sol punt), però aquests dos espais no són homeomorfs entre si (el disc té infinits punts i el punt, només un i, per tant, no hi ha opcions de tenir una bijecció). De la mateixa manera, la cinta de Möebius, un cilindre buit per dins, i un

[5] Quantamagazine: "Dennis Sullivan, Uniter of Topology and Chaos, Wins the Abel Prize".

cercle, són tots tres homotòpicament equivalents, però no n'hi ha dos d'homeomorfs. El 1965, Dennis Sullivan va completar la seva tesi doctoral, *Triangulating homotopy equivalences* [3], sota la direcció de William Browder, un dels pioners, juntament amb Sergei Novikov, Terry Wall i el mateix Sullivan, en els mètodes de cirurgia per a l'estudi i classificació de varietats diferenciables. Defensada a Princeton, la tesi donava obstruccions per tal que una equivalència homotòpica entre certes varietats admeti una deformació a un homeomorfisme, és a dir: donava condicions perquè tant hi faci el tipus d'ulleres que utilitzem. Aquest resultat permetia a Sullivan provar la *Hauptvermutung* per a una gran classe de varietats diferenciables [4].

Abans de ser ferit mortalment en un duel, Évariste Galois va estudiar les relacions entre les solucions de les equacions polinòmiques, i va introduir el concepte de simetria entre arrels i establint les primeres passes cap a la teoria de grups i el que posteriorment es coneixeria com el *grup de Galois*. La teoria de Galois és present en múltiples branques de les matemàtiques, i és cabdal en la resolució de nombrosos problemes algebraics, aritmètics, geomètrics i topològics. L'estudi de les simetries de Galois en varietats va ocupar bona part de l'etapa postdoctoral de Dennis Sullivan, període que el va veure passar per Warwick, Berkeley, Princeton i el Massachusetts Institute of Technology. En el seu estudi, Sullivan va introduir les nocions de localització i compleció d'espais topològics com "*l'anàleg a les tècniques de laboratori per a separar una substància en components més senzilles*", tal com explica a [6]. Aquestes tècniques de laboratori li van permetre, entre altres coses, provar la conjectura d'Adams[6], aleshores considerada una de les conjectures més importants en topologia, i això va donar lloc a fortes relacions entre teoria de nombres i teoria d'homotopia.

Sullivan s'inspira en les simetries de Galois que presenten les varietats algebraiques definides sobre cossos finits per a demanar, com a somni, una versió de la seva teoria d'obstruccions, originada en l'estudi del Hauptvermutung, però aquest cop definida mitjançant operacions purament geomètriques.

Moltes de les seves idees sobre grups de Galois i varietats han quedat recollides en la primera[7] conferència de Sullivan a l'ICM *Galois symmetry in manifold theory at the primes* [5] i, evidentment, en les seves conegudes notes del MIT, unes notes altament influents editades finalment per Andrew Ranicki l'any 2005 amb el títol *Localització, periodicitat i simetries de Galois* [12].

Problema II: Aigua en varietats

El guardonat ens confessa com la fascinació que els infants experimenten amb el comportament de l'aigua s'ha preservat en la seva ment fins a la dècada actual i com, des del moment que va descobrir la topologia de les varietats, ja va pensar que seria fantàstic combinar varietats i aigua.

A principis dels anys setanta, Sullivan va visitar la Universitat París-Orsay. Va romandre a França com a professor permanent de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), a temps complet fins al 1981, i més endavant només a mitja jornada, quan va ser nomenat Professor Einstein a la Univesritat de la Ciutat de Nova York. La seva etapa francesa va concloure el 1996, quan es va incorporar a la Universitat Stony Brook. Va ser durant aquests anys a França quan els interessos de Sullivan es van expandir cap als sistemes dinàmics, incloent-hi la teoria ergòdica, les foliacions, els grups kleinians, la renormalització i la teoria de Teichmüller [7], [9], [11]. En particular, el seu resultat vers la no existència de dominis errants [**?**] va donar lloc a un renaixement de la dinàmica holomorfa, no només per l'enunciat, sinó per les tècniques utilitzades en la seva demostració, que utilitzava idees en teoria de renormalització i enllaçava dinàmica real i complexa.

Segons Sullivan, l'oportunitat de realitzar el seu somni de combinar aigua i varietats va aparèixer en descobrir que les equacions del moviment de fluids incompressibles en tres dimensions no estaven resoltes matemàticament. Sullivan es refereix, evidentment, a l'equa-

[6] La conjectura d'Adams va ser provada de forma independent per Daniel Quillen, mitjançant mètodes completament diferents

[7] Sullivan ha impartit conferències a l'ICM en tres ocasions: Niça 1970, Vancouver 1974 i Berkeley 1986.

ció de Navier-Stokes, protagonista d'un dels Problemes del Mil·leni del Clay Mathematics Institute. L'enunciat d'aquest problema diu així: "Les onades segueixen el nostre vaixell mentre serpentegem pel llac, i els turbulents corrents d'aire segueixen el nostre vol en un jet modern. Els matemàtics i els físics creuen que es pot trobar una explicació i una predicció tant de la brisa com de la turbulència mitjançant la comprensió de les solucions de les equacions de Navier-Stokes. Tot i que aquestes equacions es van escriure al segle XIX, la nostra comprensió és mínima. El repte és avançar substancialment cap a una teoria matemàtica que desbloquegi els secrets amagats a les equacions de Navier-Stokes".

Persisteix en la ment de Sullivan la idea que l'estructura de les equacions en derivades parcials que emergeixen del moviment de l'aigua es podrien modelar en un món purament combinatori i de dimensió finita, on la regularitat de Sobolev, una propietat sovint desitjada per a assegurar l'existència de solucions de certes equacions, deixaria d'ésser necessària. Aquest model combinatori usaria eines recurrents en la topologia algebraica: complexos cel·lulars, triangulacions i estructures provinents de la geometria adaptades a aquest marc teòric discret, com són la dualitat de Poincaré, l'estrella de Hodge o els productes de cocadenes, altament utilitzats en la modelització algebraica dels espais topològics i, en particular, de les varietats diferencials. Tal com ens explica Sullivan, "aquestes idees es relacionen amb les observacions quotidianes sobre l'aigua que flueix a través dels llits de rierols rocosos pel que fa a un nou concepte que anomeno cooperació d'escales". El somni és, com ens indica, "trobar l'evolució a escales finites que s'observa a la natura".

Problema III: Varietats de dimensió 4

La fascinació per la dimensió 4 no és estranya en un topòleg, i encara menys en un geòmetra o un físic. És una dimensió prou gran per albergar fenòmens altament interessants, i alhora massa petita per poder demostrar certs teoremes que demanen més graus de llibertat. Per exemple, en dimensió < 4, tota varietat topològica admet una estructura de varietat diferenciable. Per contra, en dimensions superiors no sempre és així. El primer contraexemple el va donar Michel Kervaire als setanta, mitjançant una varietat de dimensió 10. Més tard se'n van trobar exemples compactes en dimensió 4. D'altra banda, en dimensió < 4 tota estructura diferenciable és única llevat de difeomorfisme. Això no és cert en dimensions superiors: John Milnor va provar que l'esfera de dimensió 7 admet 28 estructures diferenciables diferents. Els espais euclidians també ofereixen un resultat sorprenent en aquest sentit: per a tot $n \neq 4$, $\mathbb{R}^n$ admet una única estructura de varietat diferenciable. Per contra, $\mathbb{R}^4$ n'admet una quantitat no numberable, com va demostrar Simon Donaldson. Per introduir els resultats de Donaldson, Sullivan parla de la "revolució en dimensió 4 de 1982", que engloba, a més, l'obra de Michael Freedman sobre varietats topològiques de dimensió 4. En aquesta revolució, Freedman establia el teorema d'h-cobordisme topològic, i obtenia com a corol·lari la la conjectura de Poincaré topològica en dimensió 4. Mentrestant, en un altre continent i en només setmanes de diferència, Donaldson introduïa una eina inesperada en l'estudi de les varietats en dimensió 4: les *teories Gauge*, l'estudi de certes equacions en derivades parcials provinents de la física teòrica, dotades de certes simetries. Entre les varietats topològiques i les varietats diferenciables hi ha una categoria intermèdia: la de les varietats quasi conformes, en el punt de mira de Sullivan també per les seves connexions amb els sistemes dinàmics. Sullivan havia provat que, per tot $n \neq 4$, tota varietat topològica admet una única estructura de varietat diferenciable. En una recerca conjunta, Donaldson i Sullivan estenien les tècniques principals de la revolució de Donaldson al cas quasi conforme, i provaven que en dimensió 4 i només en aquesta dimensió, hi ha varietats topològiques que no admeten cap estructura quasi conforme [2]. Als anys noranta, arriba una segona revolució en dimensió 4 en què les equacions de Yang-Mills, inicialment utilitzades per Donaldson, serien suplantades per les equacions de Seiberg-Witten. El mateix Edward Witten conjecturaria que els invariants que es desprenen d'aquestes equacions no són més que un reembalatge dels invariants de Donaldson. Interessat per les possibles conseqüències en estructures quasi conformes, i preocupat per l'aparent similitud entre varietats diferenciables

i quasi conformes, Sullivan sospita d'aquesta creença, compartida tant per físics com per matemàtics, observant que les dues teories, la de Donaldson i la de Seiberg-Witten, tenen dominis *prima facie* diferents. Sullivan demana més claredat en aquesta qüestió que ha rebut tanta atenció en els darrers anys.

Problema IV: Quines varietats admeten un atles holomorf

La preocupació de Sullivan per les conseqüències topològiques davant la presència d'estructures geomètriques es fa evident en cadascun dels problemes que hem presentat, i és central en aquest darrer, un dels problemes estrella per a Dennis Sullivan, a cavall entre la teoria d'homotopia i la geometria complexa. Per a presentar-lo, ens cal parlar del món quasi complex. Tinguem doncs una varietat diferenciable amb la propietat que, a cada punt, l'espai tangent està dotat d'una estructura complexa: un endomorfisme tal que composat amb ell mateix és menys la identitat, en analogia amb el nombre purament imaginari i, que satisfà $i^2 = -1$. Cal demanar, a més, que aquesta estructura es comporti de forma diferenciable quan variem el nostre punt. Es parla aleshores d'una *estructura quasi complexa*. Associat a aquesta estructura hi ha un camp tensorial, anomenat *tensor de Nijenhuis*. El celebrat teorema d'August Newlander i Louis Nirenberg afirma que aquest tensor s'anul·la si i només si l'estructura quasi complexa prové d'una estructura complexa, i proporciona així un atles holomorf a la nostra varietat. En aquest cas, es diu que l'estructura quasi complexa és *integrable*. El teorema d'integrabilitat de Newlander i Nirenberg, provat als anys cinquanta, és potser la primera aplicació de la teoria de les equacions en derivades parcials no lineals per a la construcció d'estructures geomètriques.

Un exercici senzill permet veure que tota varietat quasi complexa ha de tenir per força dimensió parell. A més, la condició per tal que una varietat diferencial admeti una estructura de varietat quasi complexa és purament topològica, i de fet hi ha una teoria d'obstruccions prou ben entesa. Si ens preguntem per l'existència d'estructures quasi complexes integrables, l'assumpte de seguida es complica: tota estructura quasi complexa en una varietat de dimensió dos és integrable de forma trivial. En dimensió quatre, en canvi, es coneixen diversos exemples de varietats quasi complexes que no admeten cap estructura integrable. En aquest cas, s'han obtingut obstruccions mitjançant eines múltiples i variades, que van des de la classificació de superfícies compactes i complexes d'Enriques-Kodaira fins al càlcul d'invariants de Seiberg-Witten o tècniques d'àlgebra homotòpica. En dimensions superiors, l'existència de varietats quasi complexes sense estructures integrables és un problema obert. En particular, un dels problemes més destacats a geometria és el de decidir si l'esfera de dimensió 6 admet una estructura de varietat complexa. Fins l'actualitat, s'han proposat diverses solucions en ambdues direccions, però totes han resultat ésser errònies o incompletes. Sullivan va més enllà i conjectura que la suma dels nombres de Betti de tota varietat compacta i complexa de dimensió ≥ 6 és sempre ≥ 4. Aquesta agosarada conjectura dona fortes obstruccions topològiques a l'existència d'estructures complexes i la seva resolució inclouria en particular el cas de l'esfera de dimensió 6.

Una de les invencions més destacades de Sullivan resideix en l'estudi dels espais topològics quan hom ignora la torsió en els grups d'homotopia, que dona lloc a la *teoria d'homotopia racional* [8]. Des d'aquest punt de vista, els mètodes de Sullivan permeten estudiar els espais topològics de forma purament algebraica: a cada espai topològic se li associa, de forma natural, una àlgebra diferencial que té el paper de l'àlgebra de Rham de les varietats diferenciables. Aquesta àlgebra codifica el tipus d'homotopia racional de l'espai i, en casos favorables, és fàcil de calcular. Sullivan proposa buscar obstruccions a l'existència d'atals holomorfs en aquests models algebraics. La idea no és nova, i l'experiència ens (li) diu que la interacció entre aquests models algebraics i la geometria sovint dona resultats inesperats i altament potents. Un exemple és el teorema de formalitat provat per Sullivan, juntament amb Pierre Deligne, Phillip Griffiths i John Morgan, als anys setanta. El resultat dona obstruccions purament homotòpiques per tal que un espai topològic admeti una estructura de varietat Kähler compacta [1]. Aquest resultat ha estat generalitzat, espremut i utilitzat en múltiples

direccions i contextos. No seria estrany, doncs, que també donés algun fruit inesperat en l'estudi de les varietats quasi complexes.

Dennis Sullivan és autor de més d'un centenar de publicacions i ha dirigit una quarantena de tesis doctorals. Acumula nombrosos reconeixements, entre els quals hi ha el Premi Élie Cartan (1891), la Medalla Nacional de Ciències dels EUA (2005), el Premi Wolf (2010) i el Premi Balzan en Matemàtiques (2014), a banda del Premi Abel d'enguany. És membre de l'Acadèmia Nacional de Ciències dels EUA, de l'Acadèmia Americana de les Arts i les Ciències i *fellow* de la Societat Americana de Matemàtiques. Dennis Sullivan té sis fills: Lori, Amanda, Michael, Tom, Ricardo i Clara. És casat amb Moira Chas, professora de Matemàtiques a Stony Brook. Chas va defensar la tesi doctoral el 1998 a la Universitat Autònoma de Barcelona, sota la codirecció de Lluís Alsedà i Warren Dicks, i és creadora, juntament amb Dennis Sullivan, de la coneguda *string topology*, una branca de les matemàtiques que estudia les estructures algebraiques en l'homologia dels espais de llaços. Als seus 80 anys, Sullivan és un matemàtic del present. Hom el trobarà sempre envoltat dels seus alumnes i deixebles, tant de Stony Brook com de CUNY. Dirigeix enèrgicament el Seminari de la Càtedra Einstein, un seminari dedicat a entendre connexions entre topologia algebraica, teoria quàntica de camps i geometria en el sentit més ampli amb un format generós quant a temps que genera debats interessantíssims entre l'expositor i els seus assistents. A Stony Brook també hi imparteix les seves famoses classes de topologia avançada, on desenvolupa moltes de les idees que hem comentat en aquesta nota.

Agraïments

Vull donar les gràcies a Dennis Sullivan per les discussions i apunts que m'han permès escriure aquesta nota. Qualsevol errada o desviament de la realitat l'assumeix l'autora de forma exclusiva. Gràcies també a Joan Porti pel suport.

Referències

[1] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan. "Real homotopy theory of Kähler manifolds". *Invent. Math.*, **29**(3): 245–274, 1975.

[2] S. K. Donaldson and D. P. Sullivan. "Quasiconformal 4-manifolds". *Acta Math.*, **163**(3-4):181–252, 1989.

[3] D. Sullivan. "Triangulating Homotopy Equivalences. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1966. Thesis (Ph.D.) Princeton University.

[4] D. Sullivan. "On the Hauptvermutung for manifolds". *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:598–600, 1967.

[5] D. Sullivan. "Galois symmetry in manifold theory at the primes". In Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pages 169–175. 1971.

[6] D. Sullivan. "Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture". *Ann. of Math. (2)* , **100**:1–79, 1974.

[7] D. Sullivan. "Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds". *Invent. Math.*, **36**:225–255, 1976.

[8] D. Sullivan. "Infnitesimal computations in topology". *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **(47)**:269–331, 1977.

[9] D. Sullivan. "Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups". *Acta Math.*, **153**(3-4):259–277, 1984.

[10] D. Sullivan." Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains". *Ann. of Math. (2)*, **122**(3):401–418, 1985.

[11] D. Sullivan. "Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups". *Acta Math.*, **155**(3-4):243–260, 1985.

[12] D. Sullivan. "Geometric topology: localization, periodicity and Galois symmetry". K- Monographs in Mathematics, vol. 8. Springer, Dordrecht, 2005. The 1970 MIT notes, edited and preface by A. Ranicki.